Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k

$$\begin{cases} 2x+y-z & = & 2 \\ x+y+2z & = & 5 \\ -x+(k+2)z & = & 3 \end{cases}$$

Vamos a discutirlos apoyándonos en el Teorema de Rouché.

Vamos a escribir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & k+2 \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & k+2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular el Rg(A) a través de su determinante:

$$|A|=[2.1.(k+2)+1.0.(-1)+1.2.(-1)]-[(-1).1.(-1)+2.0.2+1.1.(k+2)]=$$
$$=[2k+2-2]-[1+k+2]=[2k]-[3+k]=2k-3-k=k-3$$

Resolviendo la ecuación $k-3=0 \Rightarrow k=3$

Por tanto tenemos que:

a) $Si\ k\neq 3 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow Rg(A)=3$. Además, como el rango de A* no puede ser mayor que tres y dado que Rg(A) = 3, debe ser entonces Rg(A*) =3. Es decir, que tenemos Rg(A)=Rg(A*)=3=Nº Incógnitas, luego el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, para cualquier valor de k que sea distinto de 3 (Solución única que dependerá del k elegido).
Veamos ahora lo que ocurre en el único caso que no queda clasificado por este apartado a).

b) Si $k=3$. Vamos a ver cuáles son la matriz de coeficientes y la ampliada en este caso, y estudiamos sus rangos. Obviamente, el Rg(A) < 3, puesto que el determinante de A, para el caso k=3, nos tiene que salir 0 (en caso contrario, nos habríamos equivocado en el proceso)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tomando en A* el determinante formado por la 2ª, 3ª y 4ª columnas, ocurre que es distinto de cero, por tanto el Rg(A*) = 3, y como Rg(A) = 2, el sistema en el caso k=3 es INCOMPATIBLE.

2. Discutir el siguiente sistema, según los valores del parámetro k:

$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x-3y+z &= -3 \\ 3x-2y+kz &= 1 \end{cases}$$

Lo primero, escribimos las matrices A y A*, asociadas al sistema que nos dan, para estudiar sus rangos.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

La mejor manera de calcular el rango de A, es estudiar cuando el determinante de A vale 0 y cuándo es distinto de cero, Para ello, calculemos primero el determinante de la matriz A, utilizando la regla de Sarrus, puesto que la calculadora no admite valores no numéricos en ninguno de sus elementos.

$$|A| = [-3k-4+3]-[-9-2+2k] = [-3k-1]-[-11+2k] = -3k-1+11-2k = 10-5k$$

Veamos cuándo el Det(A) =0, sin más que resolver la ecuación $10-5k=0 \Rightarrow 10=5k \Rightarrow 2=k$.

Por tanto, tendremos que:

a) $Si\ k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rg(A)=3$. Además, es evidente que Rg(A*) =3, luego se cumple que Rg(A)=Rg(A*)=3=Nº Incógnitas, luego el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (solución única) para todos los valores de k que sean distintos de 2.

Vamos a estudiar ahora el único valor que nos queda por clasificar.

b) Si k=2, sustituimos en A y en A*, y resulta que

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde luego, que Rg(A) < 3, y es fácil conseguir un determinante de orden 2, que sea no nulo y por tango Rg(A) = 2. Por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Para estudiar el Rg(A*), vemos cuál es el valor de los cuatro posibles determinantes de orden 3 que podemos conseguir con los elementos de A* y resulta que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes de orden tres de A* han salido nulos, entonces el Rg(A*)<3, y es evidente que Rg(A*)=2.
Así, resulta que Rg(A) = Rg(A*) = 2 < Nº Incógnitas, luego el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones).

Vamos a calcular ahora las infinitas soluciones de este sistema en el caso k = 2.
Para ello, como el Rg(A) = Rg(A*)=2, eso nos indica que nos podemos quedar sólo con dos ecuaciones, siempre que las dos que elijamos tengan rango 2. Lo mejor es elegir las ecuaciones que corresponden al determinante de orden 2 no nulo que nos ha permitido decidir que el Rg(A) = 2.
En nuestro caso, son las dos primeras ecuaciones. Es decir, que nuestro sistema se nos ha reducido a:

$$\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 2x-3y+z &= -3 \end{cases}$$

En este tipo de sistemas compatibles indeterminados tenemos que calcular las infinitas soluciones. Para ello, despejamos todas las variables en función de una de ellas.
Así, vamos a conseguir una ecuación que sólo tenga dos variables.
Tenemos que ajustar alguno de los coeficientes para "quitar" una de las variables del sistema.
Por ejemplo, si a la 1ª ecuación la multiplicamos por (-1) y la sumamos la segunda ecuación podemos quitar fácilmente la z, y nos queda lo siguiente:

$$\begin{cases} x+2y+z = 4 & .(-1) \Rightarrow & -x-2y-z=-4 \\ 2x-3y+z = -3 & \Rightarrow & 2x-3y-z=-3 \end{cases} \quad \Rightarrow x-5y=-7$$

$x=-7+5y$, Por tanto, ya tenemos despejada la **x** en función de la **y**
Ahora se trata, de despejar también la **z** en función de la **y**. Para ello, vamos a cualquiera de las dos ecuaciones que teníamos, y en una de ellas sustituimos el valor de x obtenido. Es decir

$$x+2y+z=4 \Rightarrow (-7+5y)+2y+z=4 \Rightarrow -7+7y+z=4 \Rightarrow z=4+7-7y \Rightarrow z=11-7y$$

Ya tenemos, la **x** y la **z** en función de la **y**, que era lo que queríamos para expresar el conjunto de soluciones de la siguiente manera.

$$\begin{cases} x &= -7+5\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 11-7\lambda \end{cases}$$